4. REPARTIȚII UTILIZATE ÎN FIABILITATE

Repartițiile specifice fiabilității se bazează pe conceptul de rată a defectărilor. Ținând seama de aspectele procesului de defectare, rata defectărilor poate fi constantă sau variabilă.

4.1. Repartiția exponențială [1, 6, 8, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 22]

Este o repartiție cu rata căderilor constantă. Conform (3.20), $f(t)=\lambda(t)\,e^{-\int_o^t \lambda(t)dt}$, densitatea de probabilitate este

$$f(t)=\lambda e^{-\lambda t}. \tag{4.1}$$

De asemenea, se determină:

Fiabilitatea: $$R(t)=e^{-\lambda t}, \tag{4.2}$$

Funcția de repartiție: $$F(t)=1-e^{-\lambda t}, \tag{4.3}$$

$$\mu_o = MTBF = \int_o^\infty t\,\lambda\, e^{-\lambda\, t} dt = \frac{1}{\lambda}, \tag{4.4}$$

Dispersia: $$\sigma^2 = \int_o^\infty (t-\mu)^2 f(t)dt = \frac{1}{\lambda^2}. \tag{4.5}$$

În fig. 4.1 sunt reprezentate funcțiile f(t), R(t) şi λ(t). Se observă că fiabilitatea este caracterizată de un singur parametru (λ) şi are valoarea 0,37 pentru t = MTBF = $1/\lambda$.

Repartiția exponențială nu este caracteristică pentru componentele mecanice, însă în studiile de fiabilitate, de exemplu în cele privind sistemele cu un număr mare de componente, această lege de repartiție se poate utiliza, considerând intensități de defectare medii, constante, uşurând mult calculele.

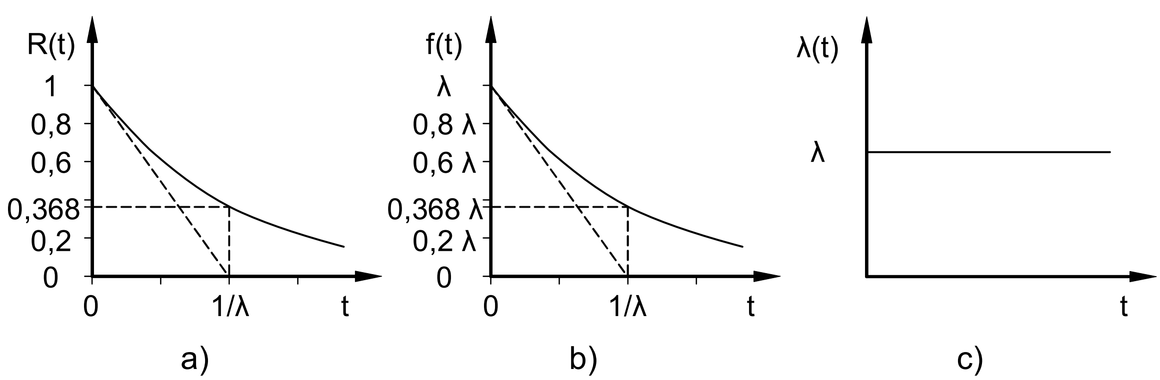

Fig. 4.1. Repartiția exponențială:
a – funcția fiabilității; b – densitatea de probabilitate; c – rata căderilor

4.2. Repartiția Weibull [1, 6, 8, 10, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 22, 25]

Profesorul suedez Walloddi Weibull a propus (1951) pentru rata căderilor o funcție biparametrică de forma:

$$\lambda(t)=a\,t^b, \tag{4.6}$$

a şi b fiind parametri.

Introducând (4.6) în expresia generală a fiabilității (3.6) rezultă:

$$R(t)=\exp\left(-\int_o^t \lambda(t)dt\right)=\exp\left(-\int_o^t at^b dt\right)=\exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta\right], \tag{4.7}$$

unde s-a notat $\eta=\left(\frac{b+1}{a}\right)^{1/(b+1)}$ şi $\beta=b+1$.

Pentru creşterea preciziei ajustării valorilor experimentale, a propus şi o funcție triparametrică de forma:

$$\lambda(t)=a(t-\gamma)^b, \tag{4.8}$$

a, b şi γ fiind parametri de ajustat.

Expresia generală a fiabilității devine

$$R(t)=\exp\left[-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta\right] \tag{4.9}$$

Parametrii sunt: η de scară, β de formă şi γ de poziție.

Introducând notațiile η, β şi γ în (4.6) şi (4.8), rata căderilor (intensitatea defectelor) are una din formele:

- biparametrică: $$\lambda(t)=\frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}, \text{ sau} \tag{4.10}$$

- triparametrică: $$\lambda(t)=\frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1}. \tag{4.11}$$

În fig. 4.2. a, b şi 4.3. a, b sunt prezentate intensitățile de defectare λ_{Wb},λ_W şi funcția fiabilității R_{wb} , R_W pentru funcția biparametrică şi triparametrică pentru diferite valori ale parametrilor de scară (η), de formă (β) şi de poziție (γ).

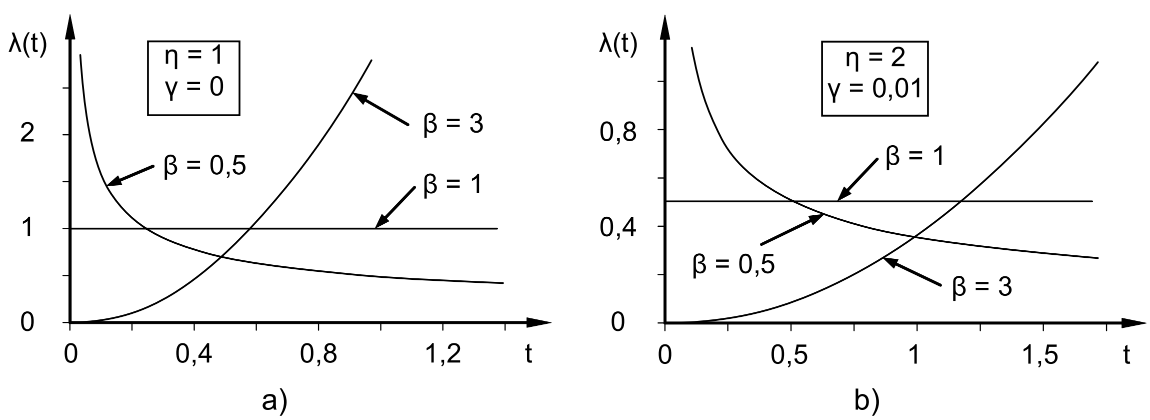

Fig. 4.2. Intensitatea de defectare în cazul repartiției Weibull:
a – modelul biparametric; b – modelul triparametric

Funcția de repartiție a defectărilor va avea expresia:

$$F(t)=1-R(t)=1-\exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta\right], \tag{4.11}$$

pentru cazul biparametric şi

$$F(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}\right], \tag{4.13}$$

pentru cel triparametric.

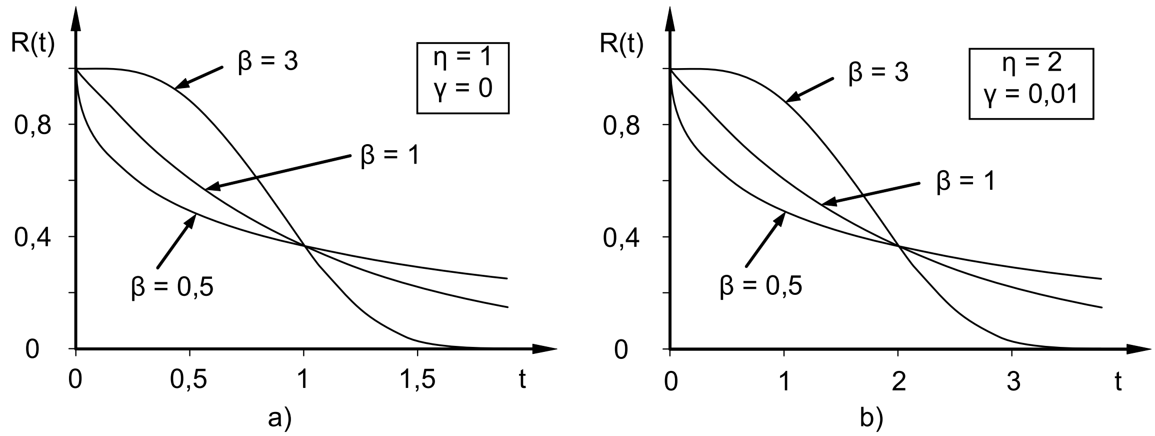

Fig. 4.3. Funcția fiabilității în cazul repartiției Weibull:
a – modelul biparametric; b – modelul triparametric

Densitatea de probabilitate a defectărilor se obține din definiția sa:

$$f(t) = \frac{dF}{dt} = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}\right] = \lambda(t)\exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}\right] \tag{4.14}$$

pentru funcția biparametrică, şi

$$f(t) = \lambda(t)\exp\left[-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}\right] \tag{4.16}$$

pentru funcția triparametrică.

În fig. 4.4 se prezintă densitatea de probabilitate a repartiției Weibull ca funcție de parametrul adimensional t/η şi diverse valori ale parametrului de formă β şi, respectiv, de poziție γ.

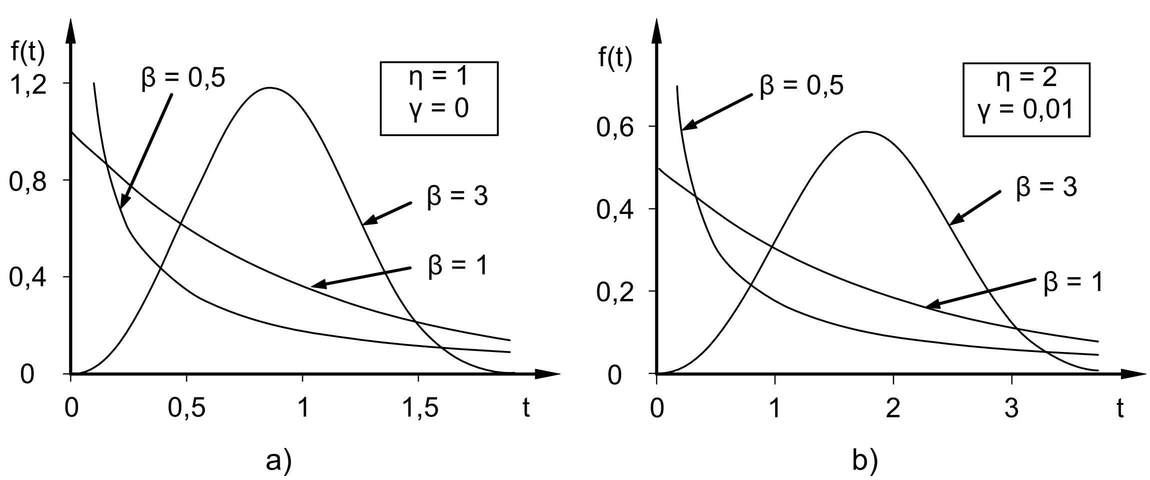

Fig. 4.4. Densitatea de probabilitate în cazul repartiției Weibull:
a – modelul biparametric; b – modelul triparametric

Media timpului de bună funcționare (MTBF) se poate determina din definiția sa:

$$MTBF = \mu_o = \int_o^\infty t\, f(t) dt = \gamma + \frac{\eta}{\beta}\Gamma(1/\beta) \tag{4.14}$$

unde $\Gamma(x)$ este funcția gama de argument x, $\Gamma(x) = \int_o^\infty y^{x-1} \cdot e^{-y} dy$, cu $x = 1/\beta$.

Demonstrația expresiei MTBF are la bază schimbarea de variabilă $(x/\eta)^\beta = y$ şi utilizarea integralei Euler de tip gama.

Funcția $\Gamma(x)$ are următoarele proprietăți utile:

- $\Gamma(a+1) = \int_o^\infty x^a e^{-x} dx = a\,\Gamma(a)$;
- $\Gamma(1) = \int_o^\infty e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_o^\infty = 1$;
- Pentru n întreg: $\Gamma(n+1) = n\,(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1\cdot \Gamma(1) = n!$;
- $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{n!\,2^{2n}}\sqrt{\pi}$;
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Dispersia timpului de bună funcționare se obține pe baza definiției:

$$D(t) = \sigma_o^2 = \int_o^\infty (t-\mu_o)^2 f(t) dt = \eta^2\left[\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right)\right] \tag{4.17}$$

Repartiția Weibull modelează bine procesele de uzare ale elementelor mecanice şi, în special, cele cu uzare prin oboseală superficială.

4.3. Repartiția normală (Gauss) [1, 6, 8, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 22, 25]

Repartiția normală este specifică proceselor aleatoare supuse unui număr mare de factori aleatori de influență, independenți unul de altul şi cu influență mică asupra procesului (consecința teoremei centrale limită).

Densitatea de repartiție este

$$f(t) = \frac{1}{\sigma_o\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(t-\mu_o)^2}{2\sigma_o^2}\right], \tag{4.18}$$

unde μ_o este media valorilor t, iar σ_o - abaterea medie pătratică.

Densitatea de repartiție a distribuției normale este simetrică în raport cu valoarea centrală μ_o, ca în fig. 4.5. Cu creşterea valorii abaterii medii pătratice curba f(t) se aplatizează.

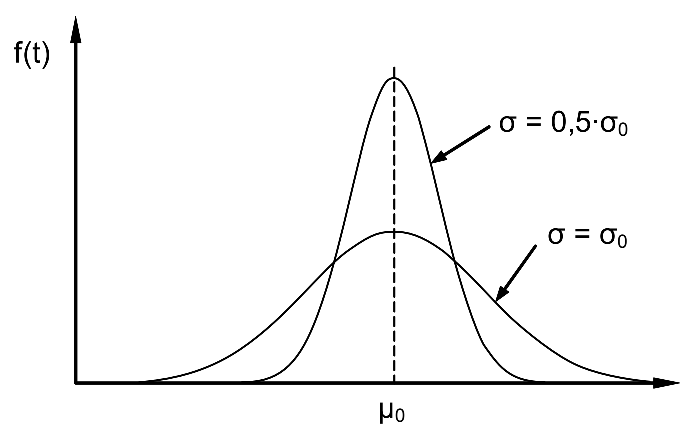

Fig. 4.5. Influența abaterii medii pătratice asupra formei curbei densității de probabilitate

Din analiza valorilor densității de repartiție (4.18), se deduce că în domeniile $\mu_0 \pm \sigma_0$, $\mu_0 \pm 2\sigma_0$ şi $\mu_0 \pm 3\sigma_0$ se află: 68,3%, 95,4% respectiv 99,7% din toate realizările evenimentului pe care îl descrie.

În cazul particular, siguranța statistică de 95% este asigurată pentru valorile variabilei cuprinse în domeniul $\mu_o \pm 1{,}96\,\sigma_o$.

Funcţia de repartiţie a defectărilor

$$F(t) = \int_o^t f(t)dt = \frac{1}{\sigma_o\sqrt{2\pi}}\int_o^t \exp\left[-\frac{(t-\mu_o)^2}{2\sigma_o^2}\right]dt = \Phi(t_a), \qquad (4.19)$$

unde $t_a = \dfrac{t-\mu_o}{\sigma_o}$ iar $\Phi(t_a)$ este funcţia integrată Laplace.

Funcţia de repartiţie a fiabilităţii este:

$$R(t_a) = 1 - \Phi(t_a) \qquad (4.20)$$

În fig. 4.6.a, b sunt prezentate graficele funcţiilor de repartiţie a defectărilor $F(t_a)$ şi de fiabilitate $R(t_a)$.

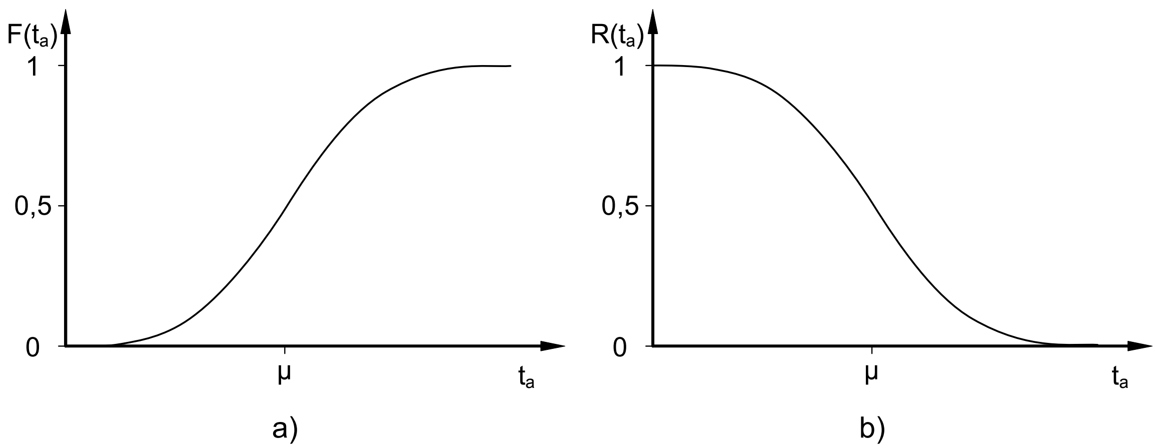

Fig. 4.6. Repartiţia normală (Gauss):
a) funcţia de repartiţie a defectărilor; b) funcţia fiabilităţii